جامعة البعث كليـة العلـوم قسم الرياضيات	امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعة ونصف العلامة: 100 درجة الاسم: براءة الأشقر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Z , -)$ تشكل زمرة حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و(-) هي عملية الطرح عليها.

(2) إن $(Z_n , +)$ بالنسبة للعملية + بالمقاس n هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة Z.

(3) مرتبة العنصر (1-) في الزمرة $(Q , +)$ تساوي 2 ، حيث Q مجموعة الأعداد العادية.

(4) جميع مولدات الزمرة $(Z_{12} , +)$ أعداد أولية .

(5) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1 , 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8 .

(6) إذا كان p عدداً أولياً فإن مرتبة زمرة اولر $U(p)$ يساوي p .

(7) إن العنصر a^2 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .

(8) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و$a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.

(9) إن عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_4(20)$ يساوي 5 .

(10) لتكن الزمرة الجزئية $H = \{0, 2, 4, 6\}$ من الزمرة $(Z_8 , +)$ ، عندئذ زمرة الجداء المباشر $U(4) \oplus H$ تكون دوارة.

(11) عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 5.

(12) إن $3Z/5Z$ هي زمرة جزئية من زمرة الخارج $Z/5Z$.

(13) رتبة العنصر $(4 , 5)$ من الزمرة $Z_{10} \oplus Z_{20}$ يساوي 30 .

(14) إن الزمرة $(U(10) , .)$ هي p- زمرة حيث p عدد أولي.

السؤال الثاني (35 درجة): لتكن $(G , .)$ زمرة ما . أثبت صحة مايلي:

(1) أياً كان $a , b \in G$ فإن $o(a . b) = o(b . a)$ حيث $o(a . b)$ هو رتبة العنصر a . b في G.

(2) إذا كانت H زمرة جزئية في G تحقق $(G : H) = 2$، فإن H تكون ناظميه في G.

(3) لتكن A, B زمرتين جزئيتين من G، أثبت أنه إذا كانت $A.B = <A \cup B>$ فإن $A.B = B.A$.

(4) إذا كانت G منتهية وغير تبديلية مرتبتها تساوي p^3 حيث p عدد أولي، وكان مركز الزمرة Z(G) لايساوي $<e>$ فإن مرتبة مركز الزمرة G ، تساوي p أي $p = (Z(G) : 1)$.

السؤال الثالث (23 درجة): لتكن $(G , .), (G`, .)$ زمرتين ما، وليكن $f: G \to G`$ تشاكلا زمرياً .

(1) أثبت أن $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$.

(2) إذا كانت الزمرة الجزئية H من G دوارة ، فأثبت أن الزمرة الجزئية $f(H)$ دوارة .

(3) لنفرض أن $f: U(30) \to U(30)$ تشاكلاً زمرياً وأن $\ker f = \{1 , 11\}$. إذا كان $f(7) = 7$ فأوجد $f^{-1}(7)$.

2017 - 7 - 16

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

سلم تصحيح أسئلة البنى الجبرية 1/ في
امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2016-2017

الجواب الأول [42 درجة] لكل بند 3 درجات.

(1) خطأ، (-) ليست تجميعية في Z.
(2) خطأ، عناصر Z_n تختلف عن عناصر Z.
(3) خطأ، مرتبة (-1) في $(Q,+)$ لانهائية.
(4) خطأ، الواحد مولد وليس أولي.
(5) خطأ، يساوي 4.
(6) خطأ، يساوي $p-1$.
(7) صح
(8) صح
(9) خطأ، يساوي 2.
(10) خطأ، رتبة 11 = 4 و رتبة $o(U(4))=2$ و $\gcd(4,2)\neq 1$.
(11) خطأ، يساوي 10.
(12) خطأ، لأن $3Z \not\supset 5Z$.
(13) خطأ تساوي 20.
(14) صح

الجواب الثاني [35 درجة]

(1) لنفرض أن رتبة ab تساوي n عندئذ $(ab)^n=e$ ومنه
$a(ba)(ba)\cdots(ba)b = e$ (7) $\Rightarrow (ba)^{n-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$ ومنه
$(ba)^n = e$. لنفرض أن رتبة (ba) تساوي m وبما أن $(ba)^n=e$
فإن m تقسم n وبما أن $(ba)^m=e$ فإن $(ab)^m=e$ وكون n رتبة ab فإن
n تقسم m ومنه $n=m$.

، وبما أن $(G:H)=2$ فإن مجموعة للرافقات اليسارية المختلفة لـ H في G
هي $\{H, aH\}$ حيث $a\in G$ وهنا نجد حالتين :
1- إذا كان $a\in H$ فإن $aH=Ha$ و H ناظمية في G
2- إذا كان $a\notin H$ وبما أن $G=H\cup aH$ فإن $aH=G\setminus H=Ha$
و H ناظمية في G .

(3) بما أن $AB=\langle A\cup B\rangle$ فإن AB زمرة جزئية من G . ليكن
$y\in AB$ عندئذ $y^{-1}\in AB$ ومنه $y^{-1}=ab$ $(a\in A, b\in B)$ ومن ثم فإن
$y=b^{-1}a^{-1}\in BA$ أي $AB\subseteq BA$ من جهة أخرى ليكن $z\in BA$ عندئذٍ
$z=cd$ $(c\in B, d\in A)$ ومنه $z=(d^{-1}c^{-1})^{-1}\in AB$ أي $BA\subseteq AB$
وبالتالي $AB=BA$.

(4) حسب الافتراض مرتبة $Z(G)$ تقسم p^3 وبالتالي تنتمي المجموعة $\{1, p, p^2, p^3\}$
وبكون $\langle e\rangle\neq Z(G)$ فإن $(Z(G):1)\neq 1$ ، وبما أن G ليست تبديلية
فإن $(ZG:1)\neq p^3$. من كون $Z(G)$ ناظمية في G فإن

$$(G/Z(G):1)=\frac{(G:1)}{(Z(G):1)}=\frac{p^3}{p^2}=p$$

أي $G/Z(G)$ دوارة ومنه G تبديلية وهذا فرض . إذاً
$(Z(G):1)\neq p^2$ وبالتالي يساوي p .

الجواب الثالث: (23 درجة)

(1) نعرف العلاقة $\varphi: G/\ker f\to \operatorname{Im} f$ على النحو الآتي:
$\forall g\ker f\in G/\ker f\ ;\ \varphi(g\ker f)=f(g)$ نجد
φ معرفة جيداً $\forall x\ker f, y\ker f\in G/\ker f$ حيث $x\ker f=y\ker f$

علاوة φ تشاكلا

$\varphi[(x\ker f)(y\ker f)] = \varphi(xy\ker f) = f(xy)$
$= f(x) f(y) = \varphi(x\ker f)\varphi(y\ker f)$

أيضاً φ متباين لأنه اذا كان $f(x) = f(y)$ فإن $f(x^{-1}y) = e'$
بمعنى $x^{-1}y \in \ker f$ أي $x\ker f = y\ker f$.

φ غامر لأنه اذا كان $z \in \operatorname{Im} f$ فإن $z = f(x)$ حيث $x \in G$ وبالتالي
و $x\ker f \in G/\ker f$ $\varphi(x\ker f) = f(x) = z$
نستنتج أن $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

(2) بما أن H دوارة فانه يوجد $a \in H$ حيث $H = \langle a \rangle$ ومنه ؛
$f(a) \in f(H)$ أي $\langle f(a) \rangle \subseteq f(H)$ ، ليكن $y \in f(H)$ عندئذ
(6) $y = f(x)$ حيث $x \in H$ ومنه $x = a^n$ ؛ $n \in Z$ ويكون
$y = f(x) = f(a^n) = [f(a)]^n \in \langle f(a) \rangle$ أي $f(H) \subseteq \langle f(a) \rangle$
من المتباينتين نجد أن $f(H) = \langle f(a) \rangle$ أي $f(H)$ دوارة .

(3) $f^{-1}(7) = 7\ker f = 7\{1, 11\} = \{7, 17\}$

(5)

الشيخ الأزهري

[illegible] الامتحان 16 / 7 / 2017